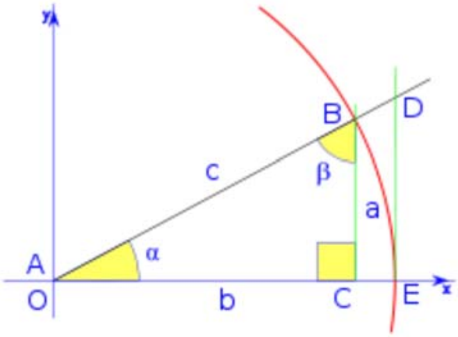
Material para el primer trabajo en grupo

Trigonometría

De Wikipedia, la enciclopedia libre

La **trigonometría** es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". *Se deriva del vocablo griego τριγωνο* <trigōno> *"triángulo" + μετρον* <metron> *"medida".*[1]



La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Para esto se vale de las razones trigonométricas, las cuales son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos.

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las funciones seno, coseno; tangente, cotangente; secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

Contenido

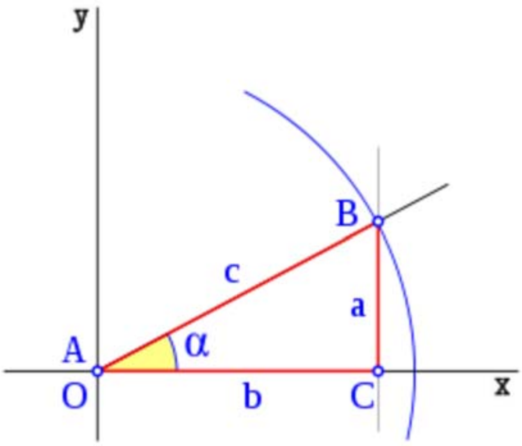
El Canadarm 2, un brazo manipulador robótico gigantesco de la Estación Espacial Internacional. Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones. Calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo requiere un uso repetido de las funciones trigonómetricas de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan.

Unidades angulares

En la medida de ángulos, y por tanto en trigonometría, se emplean tres unidades, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el Grado sexagesimal, en matemáticas es el Radián la más utilizada, y se define como la unidad natural para medir ángulos, el Grado centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al sistema decimal, se usa en topografía, arquitectura o en construcción.

- Radián: unidad angular natural en trigonometría, será la que aquí utilicemos. En una circunferencia completa hay 2π radianes.
- Grado sexagesimal: unidad angular que divide una circunferencia en 360 grados.
- Grado centesimal: unidad angular que divide la circunferencia en 400 grados centesimales.

Razones trigonométricas



El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo α, correspondiente al vértice **A**, situado en el centro de la circunferencia.

- El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sinus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa,

$$\boxed{\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}}$$

- El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}$$

- La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}}$$

Razones trigonométricas recíprocas

Se definen la **cosecante**, la **secante** y la **cotangente**, como las razones recíprocas al **seno**, **coseno** y **tangente**, del siguiente modo:

- **cosecante**: (abreviado como *csc* o *cosec*) es la razón recíproca de seno, o también su inverso multiplicativo:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{a}$$

- **secante**: (abreviado como *sec*) es la razón recíproca de coseno, o también su inverso multiplicativo:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

- **cotangente**: (abreviado como *cot* o *cta*) es la razón recíproca de la tangente, o también su inverso multiplicativo:

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}$$

Normalmente se emplean las relaciones trigonométricas **seno, coseno y tangente**, y salvo que haya un interés especifico en hablar de ellos o las expresiones matemáticas se simplifiquen mucho, los términos cosecante, secante y cotangente no suelen utilizarse.

Funciones trigonométricas inversas (Lo veremos más adelante)

En trigonometría, cuando el ángulo se expresa en radianes (dado que un radián es el arco de circunferencia de longitud igual al radio), suele denominarse arco a cualquier cantidad expresada en radianes; por eso las funciones inversas se denominan con el prefijo arco, así si:

$$y = \operatorname{sen} x$$

y es igual al **seno** de **x**, la función inversa:

$$x = \operatorname{arcsen} y$$

x es el **arco** cuyo seno vale **y**, o también **x** es el arcoseno de **y**.

si:

$$y = \cos x$$

y es igual al **coseno** de **x**, la función inversa:

$$x = \arccos y$$

x es el **arco** cuyo coseno vale **y**, que se dice: **x** es el arcocoseno de **y**.

si:

$$y = \tan x$$

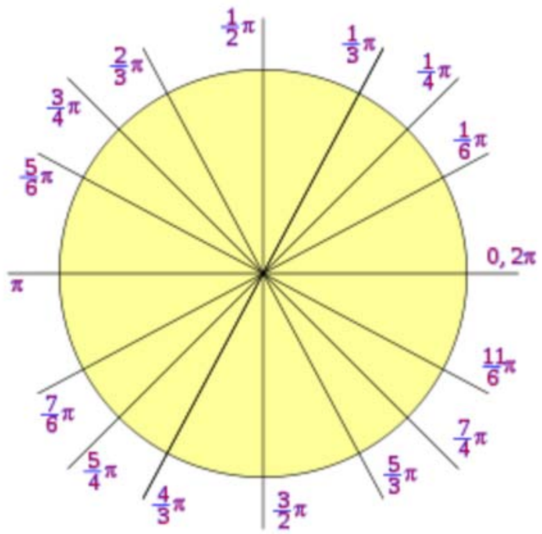
y es igual al **tangente** de **x**, la función inversa:

$$x = \arctan y$$

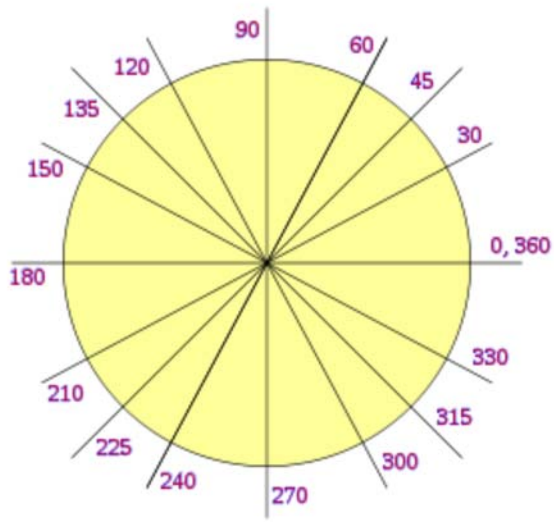
x es el **arco** cuya tangente vale **y**, ó **x** es igual al arcotangente de **y**.

Valor de las funciones trigonométricas

A continuación algunos valores de las funciones que es conveniente recordar:



Circunferencia en radianes.



Circunferencia en Grado sexagesimal.

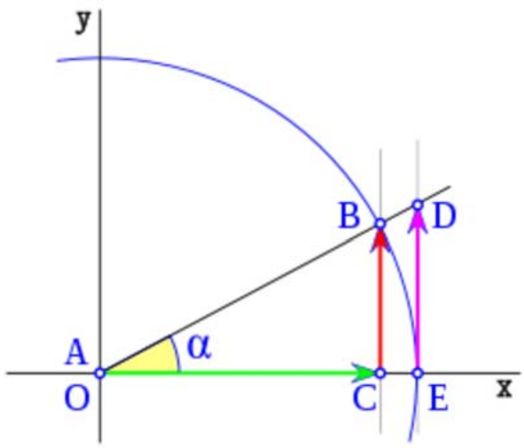
Muy Importante

Radianes	Grados sexag.	seno	coseno	tangente	cosecante	secante	cotangente
0	0^o	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0	$\nexists(\pm\infty)$	1	$\nexists(\pm\infty)$
$\frac{1}{6}\pi$	30^o	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90^o	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\nexists(\pm\infty)$	1	$\nexists(\pm\infty)$	0

Para el calculo del valor de las funciones trigonométricas se confeccionaron tablas trigonométricas. La primera de estas tablas fue desarrollada por Johann Müller Regiomontano en 1467, que nos permiten, conocido un ángulo, calcular los valores de sus funciones trigonométricas. En la actualidad dado el desarrollo de la informática, en prácticamente todos los lenguajes de programación existen librerías de funciones que realizan estos cálculos, incorporadas incluso en calculadoras electrónicas de bolsillo, por lo que el empleo actual de las tablas resulta obsoleto.

Sentido de las funciones trigonométricas

Dados los ejes de coordenadas cartesianas **xy**, de centro **O**, y una circunferencia goniométrica (circunferencia de radio la unidad) con centro en **O**; el punto de corte de la circunferencia con el lado positivo de las **x**, lo señalamos como punto **E**.



Notese que el punto **A** es el vertice del triangulo, y **O** es el centro de coordenada del sistema de referencia:

$$A \equiv O$$

a todos los efectos.

La recta **r**, que pasa por **O** y forma un ángulo α sobre el eje de las **x**, corta a la circunferencia en el punto **B**, la vertical que pasa por **B**, corta al eje **x** en **C**, la vertical que pasa por **E** corta a la recta **r** en el punto **D**.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{OE}}$$

Los puntos **E** y **B** están en la circunferencia de centro **O**, por eso la distancia $\overline{OE}$ y $\overline{OB}$ son el radio de la circunferencia, en este caso al ser una circunferencia de radio = 1, y dadas las definiciones de las funciones trigonométricas:

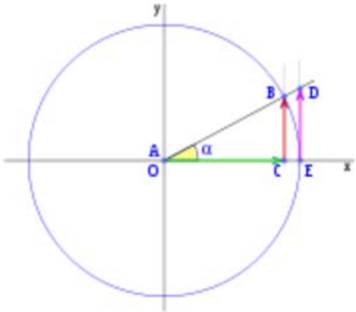
$$\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \overline{CB} \\ \cos\alpha = \overline{OC} \\ \tan\alpha = \overline{ED} \end{array}$$

tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1}$$

La tangente es la relación del seno entre el coseno, según la definición ya expuesta.

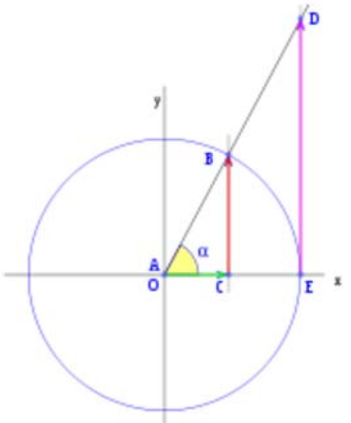
Primer cuadrante



Partiendo de esta representación geométrica de las funciones trigonométricas, podemos ver las variaciones de las funciones a medida que aumenta el ángulo α.

Para $\alpha = 0$, tenemos que **B**, **D**, y **C** coinciden en **E**, por tanto:

$$\begin{array}{l} \operatorname{sen} 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \\ \tan 0 = 0 \end{array}$$

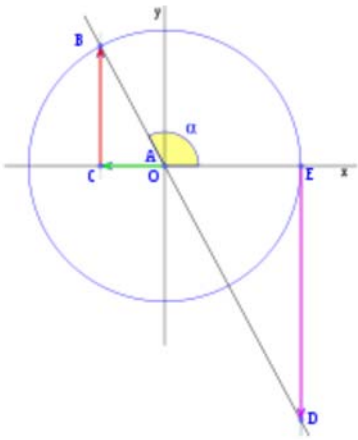


Si aumentamos progresivamente el valor de α, las distancias $\overline{CB}$ y $\overline{ED}$ aumentaran progresivamente, mientras que $\overline{OC}$ disminuirá.

Percatarse que $\overline{OC}$ y $\overline{CB}$ están limitados por la circunferencia y por tanto su máximo valor absoluto será 1, pero $\overline{ED}$ no está limitado, dado que **D** es el punto de corte de la recta **r** que pasa por **O**, y la vertical que pasa por **E**, en el momento en el que el ángulo $\alpha = 0,5\pi$ rad, la recta **r** será la vertical que pasa por **O**. Dos rectas verticales no se cortan, o lo que es lo mismo la distancia $\overline{ED}$ será infinita.

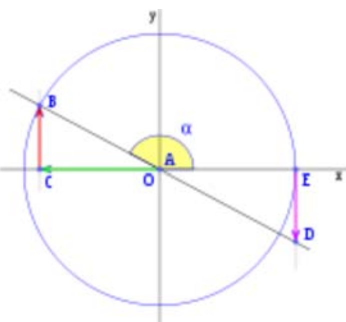
La tangente toma valor infinito cuando $\alpha = 1/2\pi$ rad, el seno vale 1 y el coseno 0.

Segundo cuadrante



Cuando el ángulo α supera el ángulo recto, el valor del seno empieza a disminuir según el segmento $\overline{CB}$, el coseno aumenta según el segmento $\overline{OC}$, pero en el sentido negativo de las **x**, el valor del coseno toma sentido negativo, si bien su valor absoluto aumenta cuando el ángulo sigue creciendo.

La tangente para un ángulo α inferior a $0,5\pi$ rad se hace infinita en el sentido positivo de las **y**, para el ángulo recto la recta vertical **r** que pasa por **O** y la vertical que pasa por **E** no se cortan, por lo tanto la tangente no toma ningún valor real, cuando el ángulo supera los $0,5\pi$ rad y pasa al segundo cuadrante la prolongación de **r** corta a la vertical que pasa por **E** en el punto **D** real, en el lado negativo de las **y**, la tangente $\overline{ED}$ por tanto toma valor negativo en el sentido de las **y**, y su valor absoluto disminuye a medida que el ángulo α aumenta progresivamente hasta los π rad.



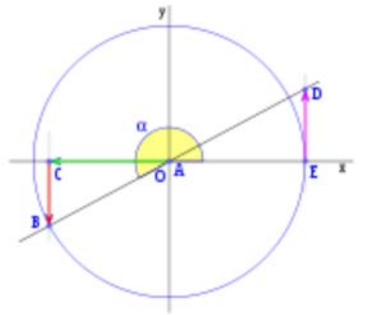
Resumiendo: en el segundo cuadrante el seno de α, $\overline{CB}$, disminuye progresivamente su valor desde 1, que toma para $\alpha = 0,5\pi$ rad, hasta que valga 0, para $\alpha = \pi$ rad, el coseno, $\overline{OC}$, toma valor negativo y su valor varia desde 0 para $\alpha = 0,5\pi$ rad, hasta –1, para $\alpha = \pi$ rad.

La tangente conserva la relación:

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

incluyendo el signo de estos valores.

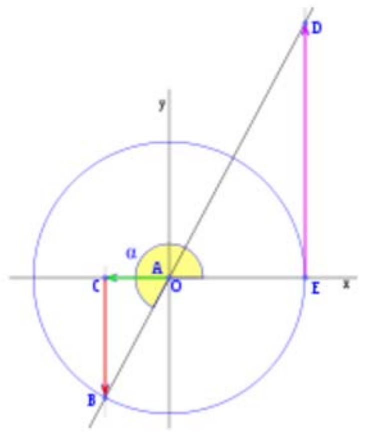
Tercer cuadrante



En el tercer cuadrante, comprendido entre los valores del ángulo $\alpha = \pi$ rad a $\alpha = 1,5\pi$ rad, se produce un cambio de los valores del seno el coseno y la tangente, desde los que toman para π rad:

$$\begin{array}{l} \operatorname{sen}\pi = 0 \\ \cos\pi = -1 \\ \tan\pi = 0 \end{array}$$

Cuando el ángulo α aumenta progresivamente, el seno aumenta en valor absoluto en el sentido negativo de las **y**, el coseno disminuye en valor absoluto en el lado negativo de las **x**, y la tangente aumenta del mismo modo que lo hacia en el primer cuadrante.



A medida que el ángulo crece el punto **C** se acerca a **O**, y el segmento $\overline{OC}$, el coseno, se hace más pequeño en el lado negativo de las **x**.

El punto **B**, intersección de la circunferencia y la vertical que pasa por **C**, se aleja del eje de las **x**, en el sentido negativo de las **y**, el seno, $\overline{CB}$.

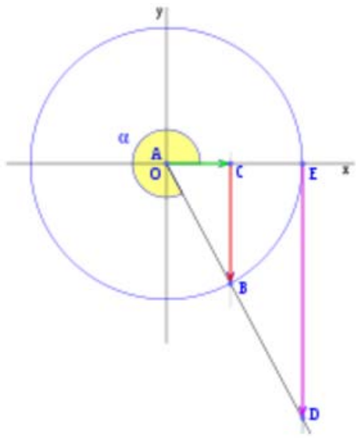
Y el punto **D**, intersección de la prolongación de la recta **r** y la vertical que pasa por **E**, se aleja del eje las **x** en el sentido positivo de las **y**, con lo que la tangente, $\overline{ED}$, aumenta igual que en el primer cuadrante

Cuando el ángulo α alcance $1,5\pi$ rad, el punto **C** coincide con **O** y el coseno valdrá cero, el segmento $\overline{CB}$ será igual al radio de la circunferencia, en el lado negativo de las **y**, y el seno valdrá –1, la recta **r** del ángulo y la vertical que pasa por **E** serán paralelas y la tangente tomara valor infinito por el lado positivo de las **y**.

El seno el coseno y la tangente siguen conservando la misma relación, tanto en valores como en signo, nótese que cuando el coseno vale cero, la tangente se hace infinito.

Cuarto cuadrante

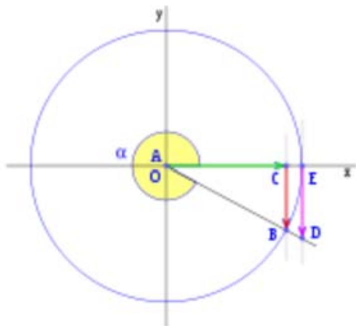
En el cuarto cuadrante, que comprende los valores del ángulo α entre $1,5\pi$ rad y 2π rad, las variables trigonométricas varían desde los valores que toman para $1,5\pi$ rad:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(1,5\,\pi) &= -1 \\ \cos(1,5\,\pi) &= 0 \\ \tan(1,5\,\pi) &= \infty \end{aligned}$$

hasta los que toman para 2π rad pasando al primer cuadrante, completando una rotación:

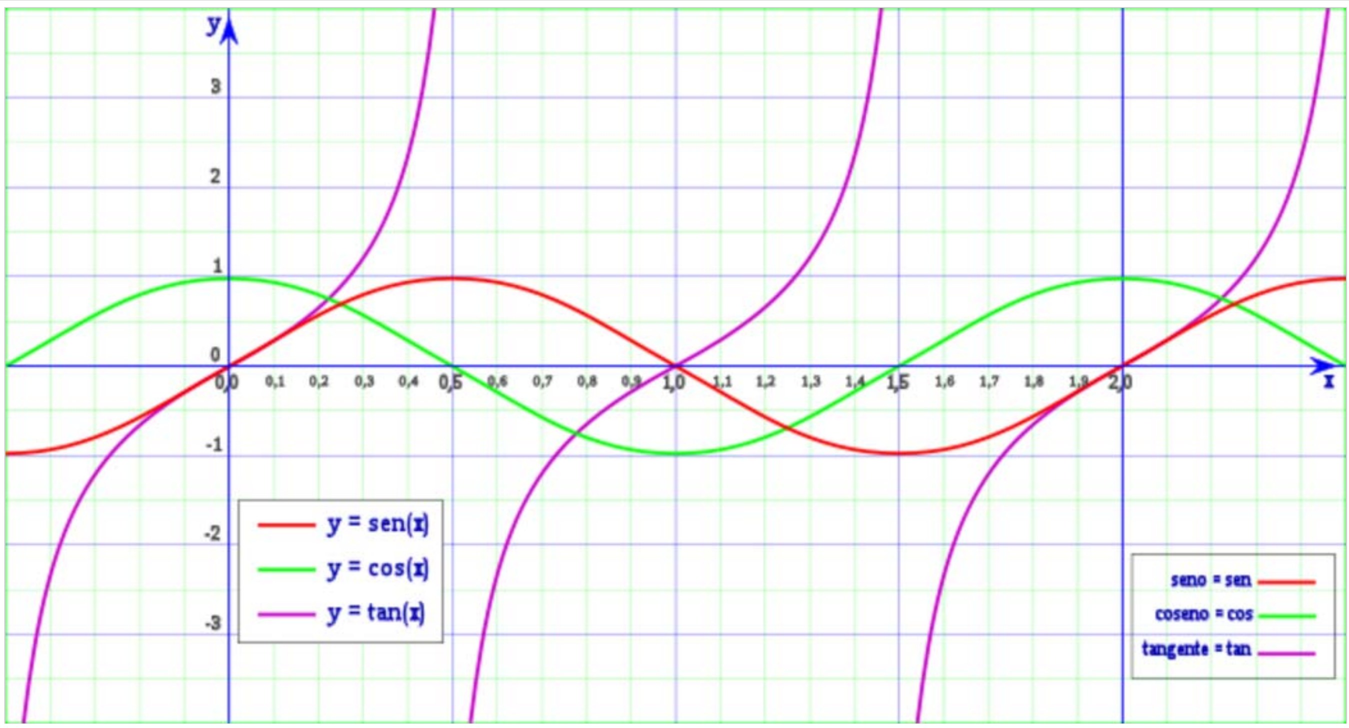
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\,\pi) &= 0 = 0 \\ \cos(2\,\pi) &= \cos 0 = 1 \\ \tan(2\,\pi) &= \tan 0 = 0 \end{aligned}$$



como puede verse a medida que el ángulo α aumenta, aumenta el coseno $\overline{OC}$ en el lado positivo de las **x**, el seno $\overline{CB}$ disminuye en el lado negativo de las **y**, y la tangente $\overline{ED}$ también disminuye en el lado negativo de las **y**.

Cuando α, vale 2π ó 0π al completar una rotación completa los puntos **B**, **C** y **D**, coinciden en **E**, haciendo que el seno y la tangente valga cero, y el coseno uno, del mismo modo que al comenzarse el primer cuadrante.

Representación gráfica



Representación de las funciones trigonométricas en el plano xy, los valores en el eje x multiplicados por π radianes.

Identidades trigonométricas (Recuadramos las Identidades fundamentales)

Una identidad es una igualdad en que se cumple para todos los valores permisibles de la variable. En trigonometría existen seis identidades fundamentales:

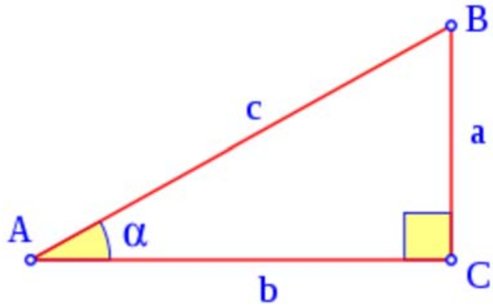
Recíprocas

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\csc(\alpha)=1$$
$$\cos(\alpha)\cdot\sec(\alpha)=1$$
$$\tan(\alpha)\cdot\cot(\alpha)=1$$

De división

$$\tan(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Por el teorema de Pitágoras



Como en el triángulo rectángulo cumple la funcion que:

$$a^2+b^2=c^2$$

de la figura anterior se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{a}{c}$$

$$cos(\alpha)=\frac{b}{c}$$

$$c=1$$

entonces para todo ángulo α, se cumple la identidad Pitagórica :

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

que también puede expresarse:

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$
$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

Suma y diferencia de dos ángulos

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Suma y diferencia del seno y coseno de dos ángulos

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Producto del seno y coseno de dos ángulos

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

Ángulo doble

Las fórmulas recuadradas son muy importantes

$$\boxed{\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = -1 + 2\cos^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Ángulo mitad

Se deducen de las anteriores haciendo x=alpha/2

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Otras identidades trigonométricas

Estas identidades son útiles para deducir ángulos a partir de los ángulos básicos

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{sen}\alpha$$

$$\text{sen}(\pi-\alpha) = \text{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\text{sen}(2\pi-\alpha) = -\text{sen}\alpha$$

$$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \text{sen}\beta \cdot \cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta)$$

Véase también: Sinusoide

Función tangente

En un triángulo rectángulo, la tangente (abreviada como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\tan a = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{sen}a}{\cos a} = \frac{a}{b}$$

El valor de la tangente para algunos ángulos importantes es:

tan = AC / OA = BD / OB = sen / cos
tan (π/2) = tan (90°) = +∞
tan (-π/2) = tan (-90°) = -∞
tan (0) = 0
tan (π/4) = tan (45°) = 1

tan (π/3) = tan 60°= $\sqrt{3}$

tan (π/6) = tan 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Una identidad de importancia con la tangente es:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Seno y coseno, funciones complejas

El seno y coseno se definen en matemática compleja, gracias a la fórmula de Euler como:

$$\text{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Por lo tanto, la tangente quedará definida como:

$$\tan\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{ie^{i\alpha} + ie^{-i\alpha}}$$

Siendo $i = \sqrt{-1}$ (también puede representarse como *j*).

Referencias

1. ↑ «Etimología de la palabra "trigonometría" (http://www.etymonline.com/index.php?search=trigonometry) ».

Diccionario web de etimología (inglés).

Bibliografía

1. Cortés Espinosa de los Monteros, Nuria. Ediciones Didácticas y Pedagógicas S. L. (ed.). *Actividades para unidad didáctica sobre trigonometría [Recurso electrónico] (2008)*. ISBN 978-84-936336-3-9.
2. Domínguez Muro, Mariano. Universidad de Salamanca. Ediciones Universidad Salamanca (ed.). *Trigonometría activa: 2 BUP (1985)*. ISBN 978-84-7800-056-2.

Véase también

- Función trigonométrica
- Identidad trigonométrica
- Funciones hiperbólicas
- Lista de integrales de funciones trigonométricas
- Fórmula de Euler y Número complejo, para funciones trigonométricas complejas
- Trigonometría esférica

Enlaces externos

- Wikilibros alberga un libro o manual sobre **Tabla trigonométrica**.
- Ejercicios de Trigonometría (http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/trigonometria/indice.htm) (Proyecto Descartes para Educación Secundaria del Ministerio de Educación de España).
- Álgebra y Trigonometría. Universidad de Chile (http://mazinger.sisib.uchile.cl/repositorio/lb/ciencias_agronomicas/fernandezc01/index.html)
- Trigonometría (http://recursos.pnte.cfnavarra.es/~msadaall/geogebra/trigono.htm) (Applets con Geogebra de Manuel Sada).
- Trigonometría. Precálculo21 (http://usuarios.lycos.es/calculo21/id19.htm)
- Orígenes de la trigonometría (http://www.educar.org/enlared/miswq/webquest_2.htm) (Webquest).
- Matemática - Trigonometría (http://www.fisicanet.com.ar/matematica/m1_trigonometria.php) (Apuntes y ejercicios de Trigonometría en Fisicanet).
- Unidad Didáctica. Razones Trigonométricas (http://www.lopezdearenas.com/trigonometria/inicio.htm) (IES López de Arenas, de Marchena (Sevilla)).
- La trigonometría, ¿para qué sirve? (http://www.phy6.org/stargaze/Mtrig1.htm)

Obtenido de "http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa"
Categoría: Trigonometría
